Introdução a Sinais e Sistemas, Sinais Básicos e Operações com Sinais

Prof. Glauber Brante

UTFPR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
DAELT – Departamento Acadêmico de Eletrotécnica

O que são “Sinais” e “Sistemas”?

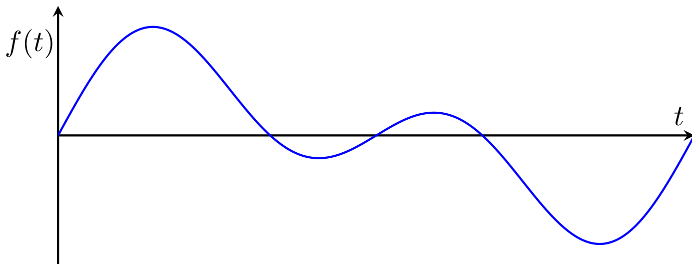
Sinais:

- Conjuntos de dados ou informação.
- Matematicamente são funções de uma ou mais variáveis independentes.
- Ex.: Tensão na rede, sinal de ECG, uma imagem, um vídeo, cotação da bolsa, etc.

O que são “Sinais” e “Sistemas”?

Sinais:

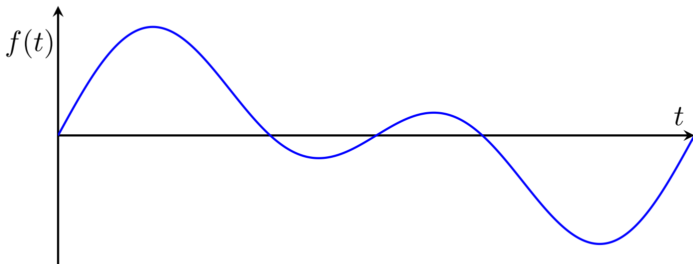
- Conjuntos de dados ou informação.
- Matematicamente são funções de uma ou mais variáveis independentes.
- Ex.: Tensão na rede, sinal de ECG, uma imagem, um vídeo, cotação da bolsa, etc.



O que são "Sinais" e "Sistemas"?

Sinais:

- Conjuntos de dados ou informação.
- Matematicamente são funções de uma ou mais variáveis independentes.
- Ex.: Tensão na rede, sinal de ECG, uma imagem, um vídeo, cotação da bolsa, etc.

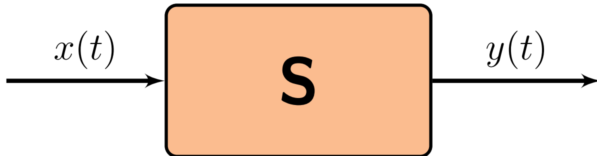


- Nesta disciplina, o foco são sinais função de uma única variável: o **tempo**.
- Exemplos de funções multivariável: imagens $f(x, y)$ e vídeos $f(x, y, t)$

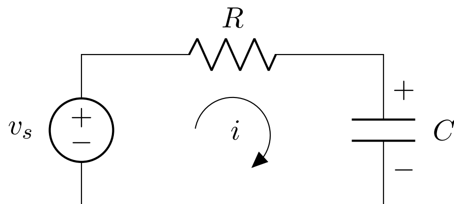
O que são "Sinais" e "Sistemas"?

Sistemas:

- Processam sinais modificando-os ou extraindo informações.
- Matematicamente transformam a função de entrada em outra função de saída (pode ser HW ou SW).
- Ex.: Circuito elétrico, medidor de batimento cardíaco, compactador de arquivos, estimador de cotação de ações, etc.



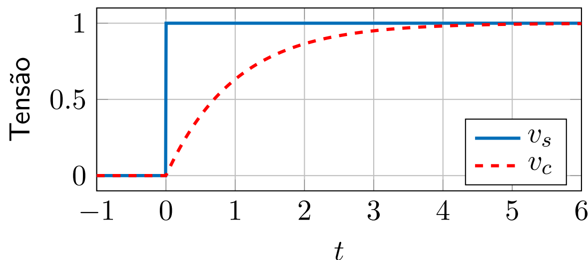
Exemplo: Circuito Elétrico



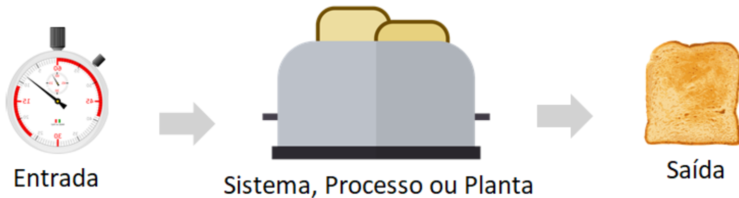
$$i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t}$$

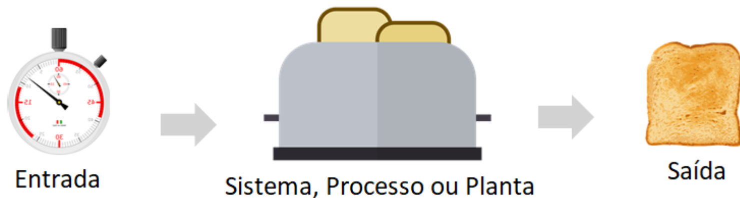
$$\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$$



Exemplo: Sistema de Controle



Exemplo: Sistema de Controle

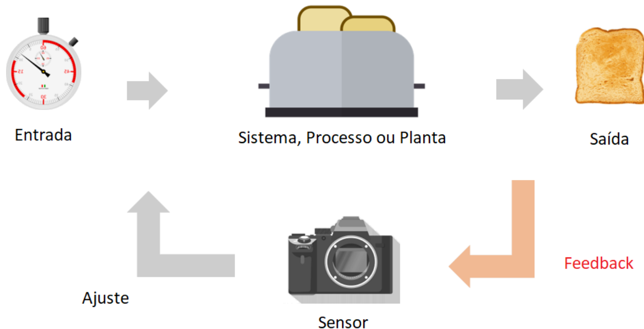


Sistema de controle em malha aberta:



Exemplo: Sistema de Controle

Sistema de controle em malha fechada:



Exemplo: Indústria 4.0 e IoT

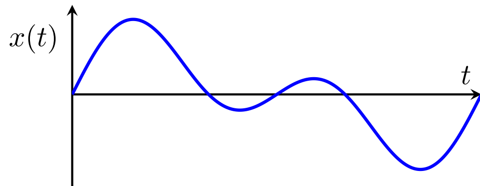


Tipos de Sinais

Sinais Contínuos e Sinais Discretos

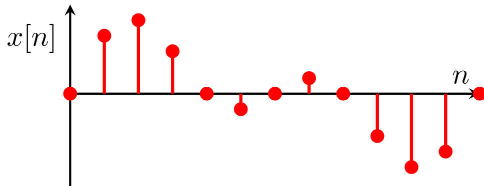
Sinal Contínuo (no tempo):

- A função $x(t)$ é definida para todos os valores de suas variáveis.



Sinal Discreto (no tempo):

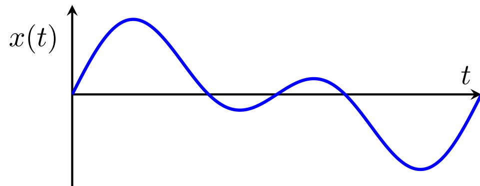
- A função $x[n]$ é definida apenas para valores inteiros de suas variáveis.



Sinais Contínuos e Sinais Discretos

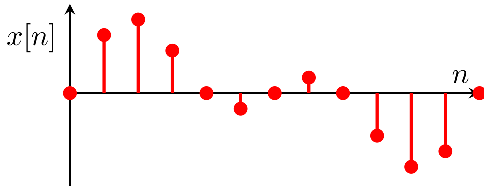
Sinal Contínuo (no tempo):

- A função $x(t)$ é definida para todos os valores de suas variáveis.
- **Exemplos:** tensão na rede, ECG, som no vinil, etc.



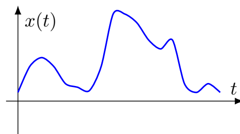
Sinal Discreto (no tempo):

- A função $x[n]$ é definida apenas para valores inteiros de suas variáveis.
- **Exemplos:** tensão amostrada, temperatura máxima no dia, som no CD, etc.



Sinais Analógicos e Sinais Digitais

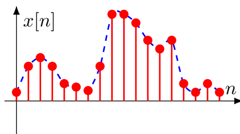
Sinal Analógico



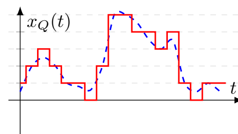
Amostragem

Quantização

Sinal em Tempo Discreto



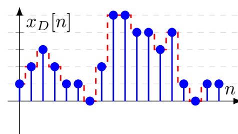
Sinal Quantizado



Quantização

Amostragem

Sinal Digital

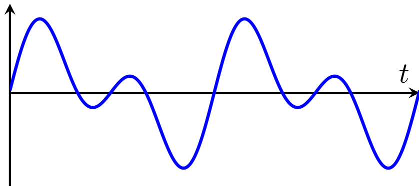


Sinais Determinísticos e Aleatórios

Sinais Determinísticos

- Descrição completamente conhecida

$$x(t) = \sin(t) + \sin(2t + \pi)$$

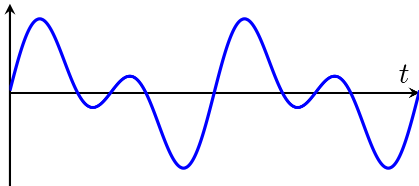


Sinais Determinísticos e Aleatórios

Sinais Determinísticos

- Descrição completamente conhecida

$$x(t) = \sin(t) + \sin(2t + \pi)$$



Sinais Aleatórios

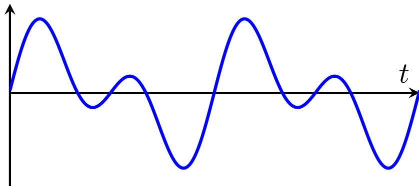
- Totalmente desconhecido

Sinais Determinísticos e Aleatórios

Sinais Determinísticos

- Descrição completamente conhecida

$$x(t) = \sin(t) + \sin(2t + \pi)$$



Sinais Aleatórios

- Totalmente desconhecido
- Parâmetros estatísticos conhecidos

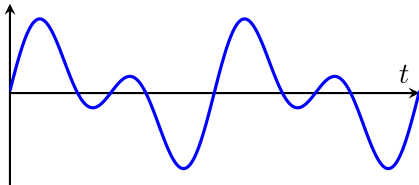
$$x(t) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

Sinais Determinísticos e Aleatórios

Sinais Determinísticos

- Descrição completamente conhecida

$$x(t) = \sin(t) + \sin(2t + \pi)$$

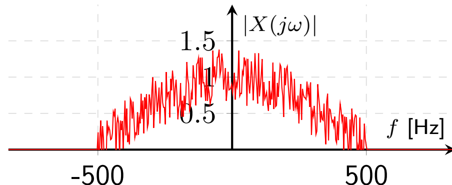


Sinais Aleatórios

- Totalmente desconhecido
- Parâmetros estatísticos conhecidos

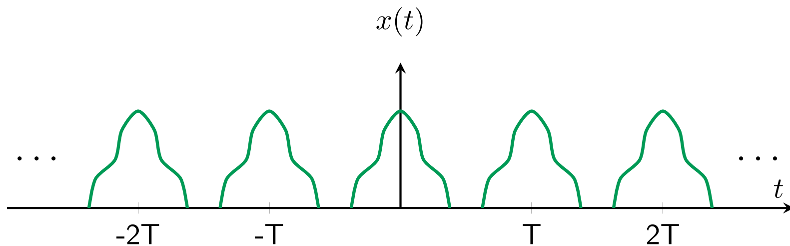
$$x(t) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

- Parâmetros espectrais conhecidos



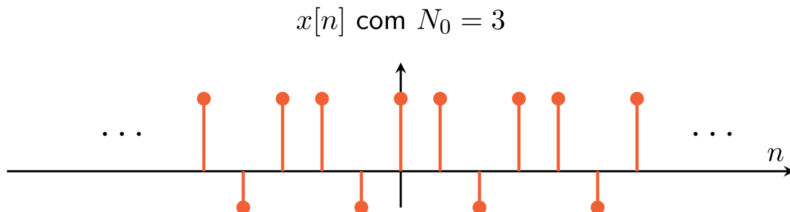
Sinais Periódicos

- $x(t) = x(t + mT)$, $m \in \mathbb{Z}$, $T \in \mathbb{R}$, Período Fundamental: T_0

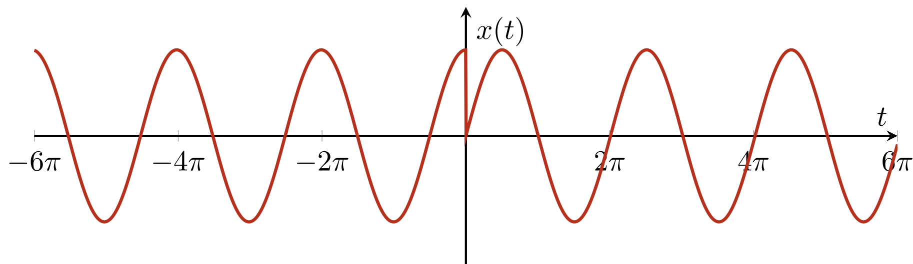


Sinais Discretos Periódicos

- $x[n] = x[n + kN], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad N \in \mathbb{R},$ Período Fundamental: N_0

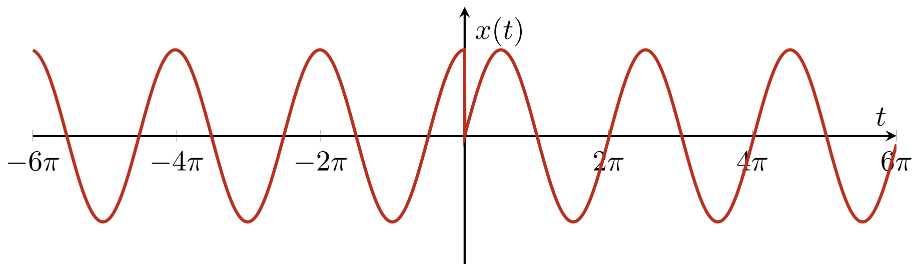


Exemplo



$$x(t) = \begin{cases} \cos(t), & t < 0 \\ \sin(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

Exemplo



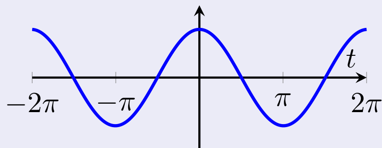
$$x(t) = \begin{cases} \cos(t), & t < 0 \\ \sin(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

Sinal com descontinuidade/singularidade

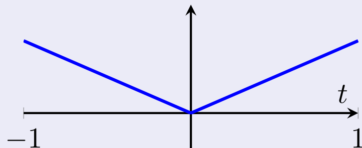
Sinais Pares e Ímpares

Sinal Par: $x(t) = x(-t)$

$x(t) = \cos(t)$

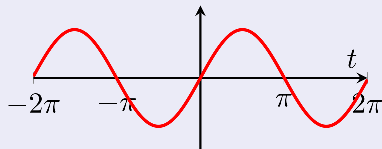


$x(t) = |t|$

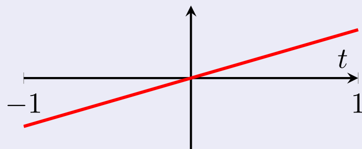


Sinal Ímpar: $x(t) = -x(-t)$

$x(t) = \sin(t)$



$x(t) = t$



Decomposição Par-Ímpar

- Muitos sinais não podem ser classificados nem como par, nem como ímpar.
- Entretanto, eles possuem componentes dos dois tipos.

Decomposição Par-Ímpar

$$x(t) = x_{\text{par}}(t) + x_{\text{ímpar}}(t)$$

$$x_{\text{par}}(t) = \frac{1}{2}\Big[x(t) + x(-t)\Big]$$

$$x_{\text{ímpar}}(t) = \frac{1}{2}\Big[x(t) - x(-t)\Big]$$

Decomposição Par-Ímpar

- Muitos sinais não podem ser classificados nem como par, nem como ímpar.
- Entretanto, eles possuem componentes dos dois tipos.

Decomposição Par-Ímpar

$$x(t) = x_{\text{par}}(t) + x_{\text{ímpar}}(t)$$

$$x_{\text{par}}(t) = \frac{1}{2}\Big[x(t) + x(-t)\Big]$$

$$x_{\text{ímpar}}(t) = \frac{1}{2}\Big[x(t) - x(-t)\Big]$$

Exercício:

1) Determine e esboce as componentes par e ímpar do sinal

$$x(t) = t + 2$$

Decomposição Par-Ímpar

- Muitos sinais não podem ser classificados nem como par, nem como ímpar.
- Entretanto, eles possuem componentes dos dois tipos.

Decomposição Par-Ímpar

$$x(t) = x_{\text{par}}(t) + x_{\text{ímpar}}(t)$$

$$x_{\text{par}}(t) = \frac{1}{2}\Big[x(t) + x(-t)\Big]$$

$$x_{\text{ímpar}}(t) = \frac{1}{2}\Big[x(t) - x(-t)\Big]$$

Exercício:

2) Determine e esboce as componentes par e ímpar do sinal

$$x(t) = e^{jt}$$

Energia e Potência de Sinais

Energia de um Sinal

- A energia de um sinal é dada em todo seu intervalo de definição, de $-\infty$ até ∞.

Sinais contínuos:

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

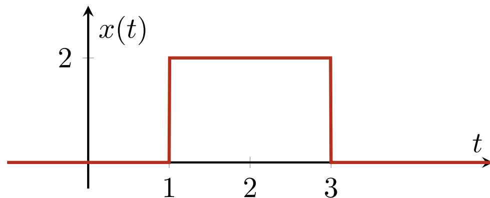
Sinais discretos:

$$E_x \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Energia de um Sinal

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

- **Exemplo 1:** calcule a energia do sinal representado abaixo



Energia de um Sinal

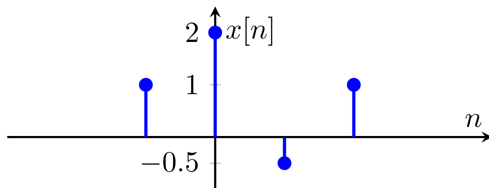
$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

- **Exemplo 2:** calcule a energia do sinal $x(t) = 10$

Energia de um Sinal

$$E_x \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- **Exemplo 3:** calcule a energia do sinal representado abaixo



Potência de um Sinal

- A potência média de um sinal é dada por:

Sinais Contínuos:

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

Sinais Discretos:

$$P_x \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Potência de um Sinal

- A potência média de um sinal é dada por:

Sinais Contínuos:

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

Sinais Discretos:

$$P_x \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

- **Exemplo:** calcule a potência do sinal $x(t) = 10$

Potência de um Sinal Periódico

- Para sinais periódicos:

Sinais contínuos (de período fundamental T_0)

$$P_x \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

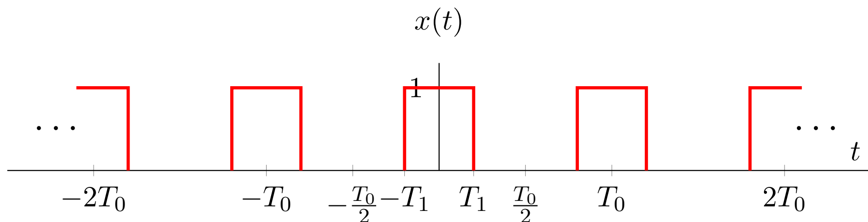
Sinais discretos (de período fundamental N_0):

$$P_x \triangleq \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2$$

Potência de um Sinal Periódico

$$P_x \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

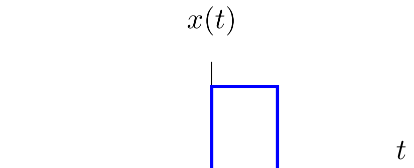
- **Exemplo:** calcule a potência do sinal representado abaixo



Sinais de Energia e Sinais de Potência

Sinais de Energia

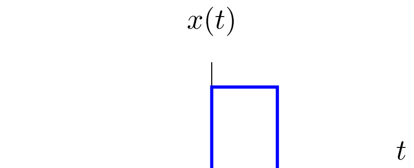
- E_x finita, não nula
- P_x nula
- $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$
- $x(t) < \infty$, $\forall t$



Sinais de Energia e Sinais de Potência

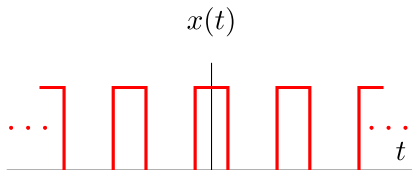
Sinais de Energia

- E_x finita, não nula
- P_x nula
- $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$
- $x(t) < \infty$, $\forall t$

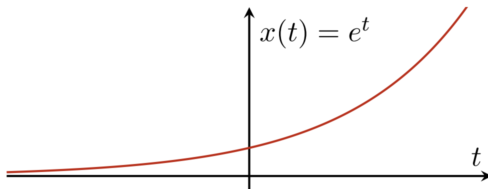


Sinais de Potência

- $E_x \to \infty$
- P_x finita, não nula
- $x(t) < \infty$, $\forall t$



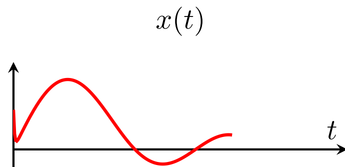
Último Exemplo

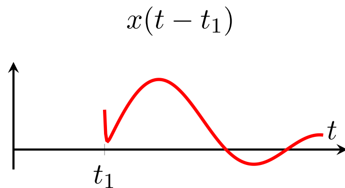


- $E_x \to \infty$
- $P_x \to \infty$
- Não é sinal de energia nem de potência

Operações com Sinais

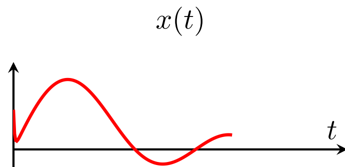
Deslocamento

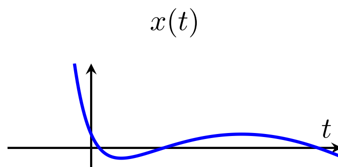


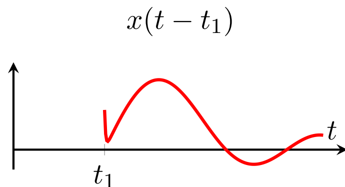


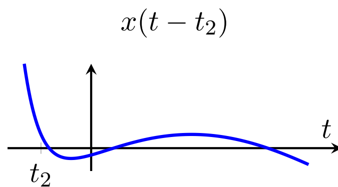
Nesta figura, $t_1 > 0$, de forma que $x(t - t_1)$ é uma versão atrasada de $x(t)$.

Deslocamento





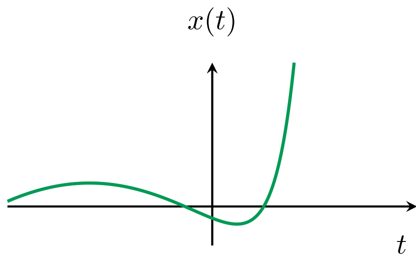


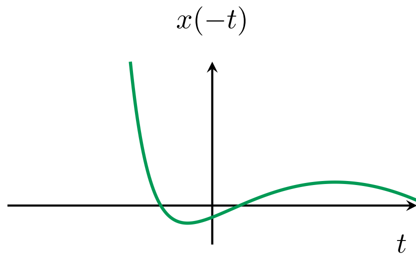


Nesta figura, $t_1 > 0$, de forma que $x(t-t_1)$ é uma versão atrasada de $x(t)$.

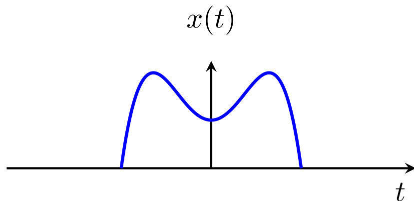
Nesta figura, $t_2 < 0$, de forma que $x(t-t_2)$ é uma versão adiantada de $x(t)$.

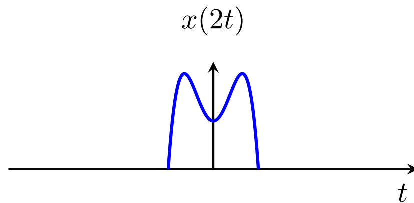
Reversão

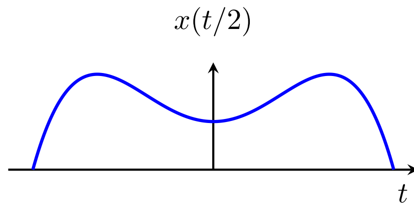




Escalonamento



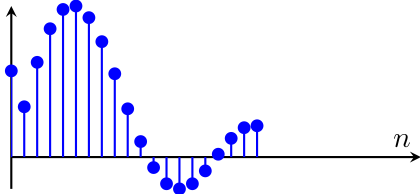




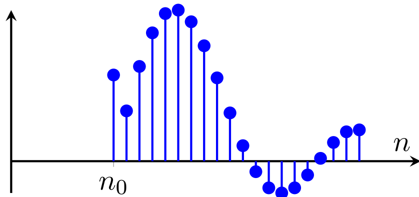
Operações com Sinais Discretos

Deslocamento

$x[n]$

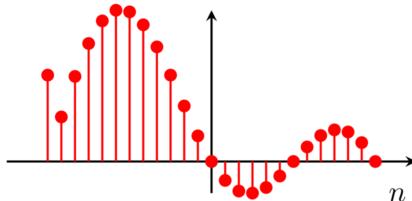


$x[n - n_0]$

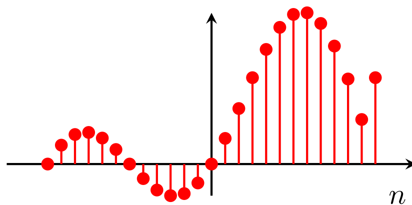


Reversão

$x[n]$

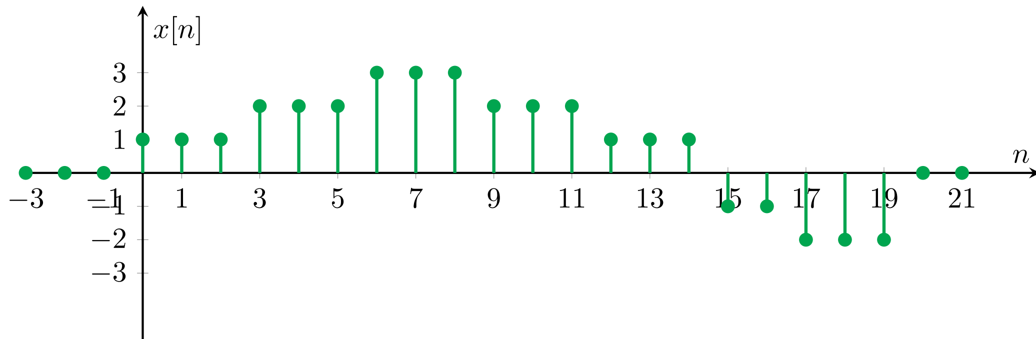


$x[-n]$



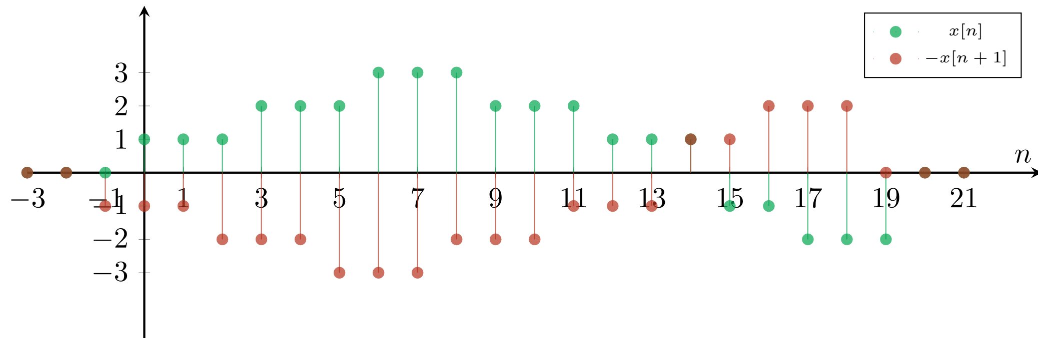
Deslocamento – Exemplo

Dado $x[n]$, encontre $x[n] - x[n+1]$.



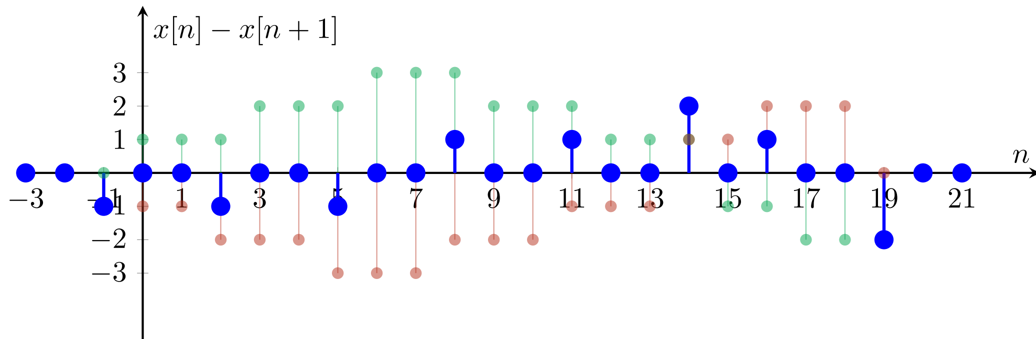
Deslocamento – Exemplo

Dado $x[n]$, encontre $x[n] - x[n+1]$.



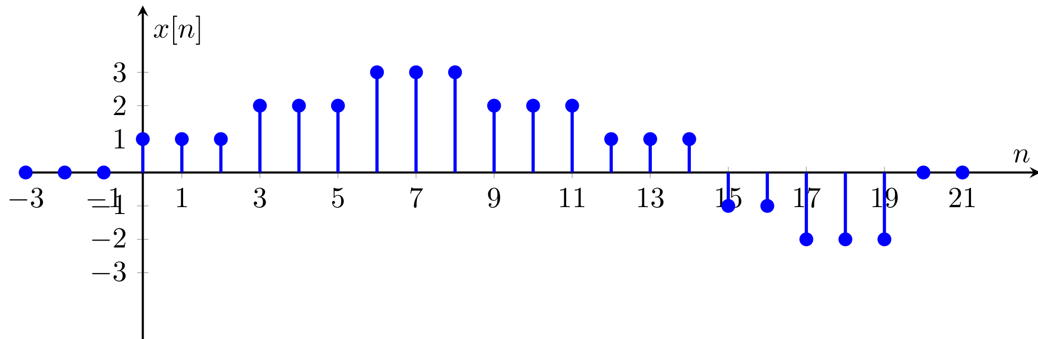
Deslocamento – Exemplo

Dado $x[n]$, encontre $x[n] - x[n+1]$.



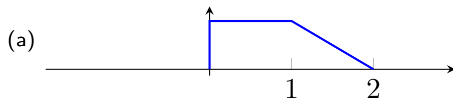
Escalonamento (Downsamplig e Upsampling)

Dado $x[n]$, encontre $x[2n]$ e $x[\frac{n}{2}]$.

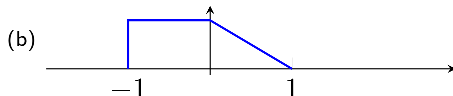


Exercício

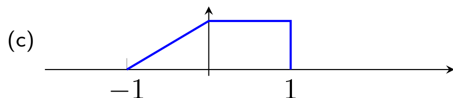
(a)



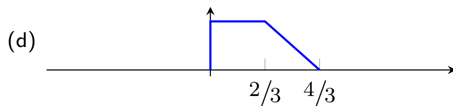
(b)



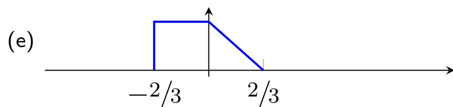
(c)



(d)



(e)



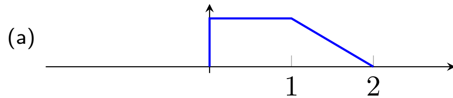
Escalona primeiro e desloca depois?

Desloca primeiro e escalona depois?

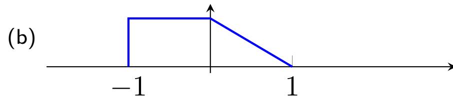
A ordem das operações importa?

Exemplo

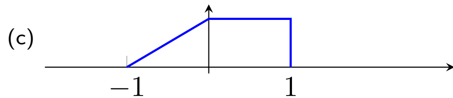
(a)



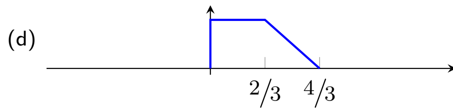
(b)



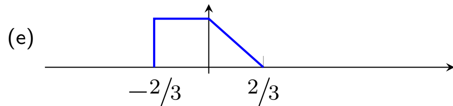
(c)



(d)



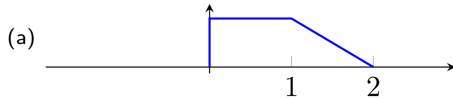
(e)



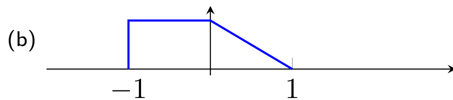
$x(t)$

Exemplo

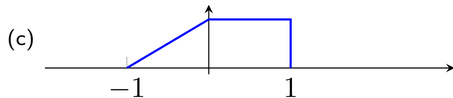
(a)



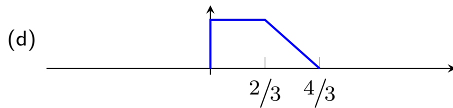
(b)



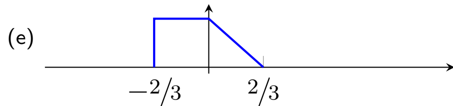
(c)



(d)



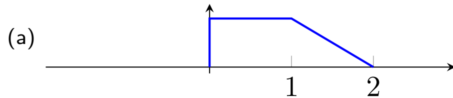
(e)

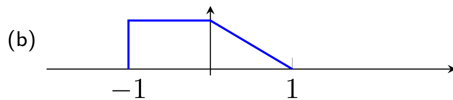


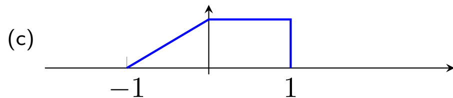
$x(t)$

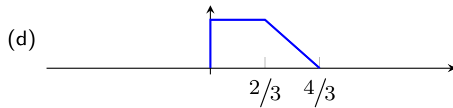
$x(t+1)$

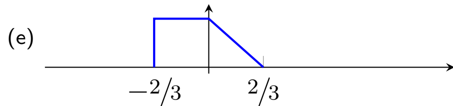
Exemplo











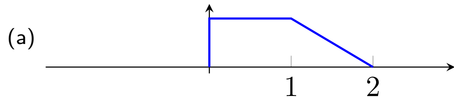
$x(t)$

$x(t+1)$

$x(-t+1)$

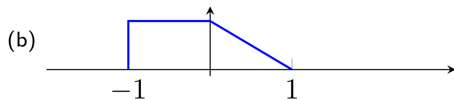
Exemplo

(a)



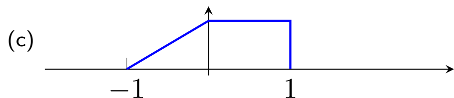
$x(t)$

(b)



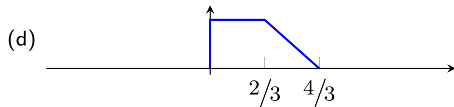
$x(t+1)$

(c)



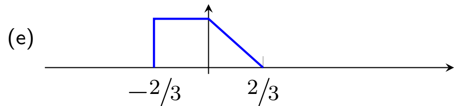
$x(-t+1)$

(d)

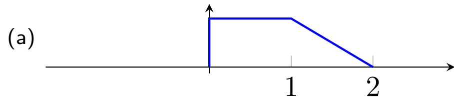


$x\left(\frac{3}{2}t\right)$

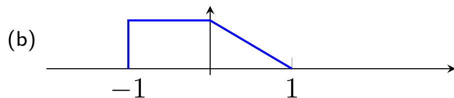
(e)



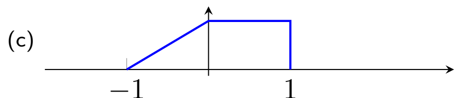
Exemplo



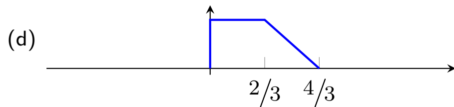
$x(t)$



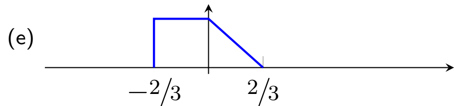
$x(t+1)$



$x(-t+1)$



$x\left(\frac{3}{2}t\right)$



$x\left(\frac{3}{2}t + 1\right)$

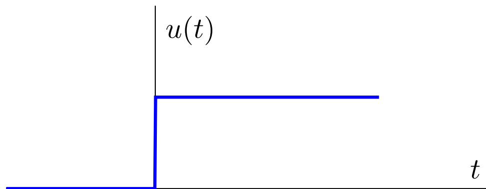
Sinais Básicos

Degrau Unitário

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

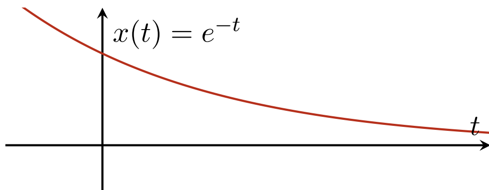
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

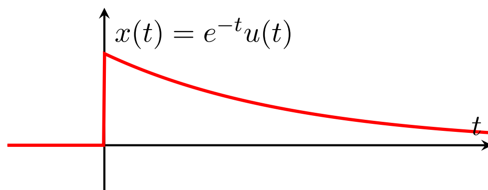
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



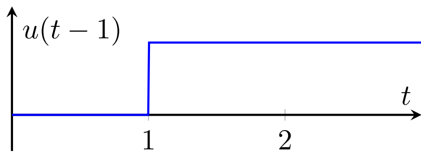
Degrau Unitário

- Multiplicação por outros sinais:

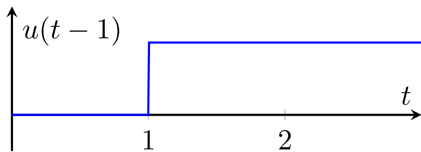


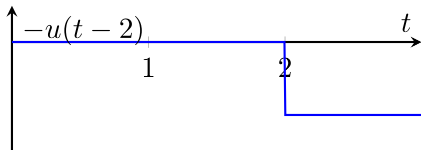


Degrau Unitário – Janelamento

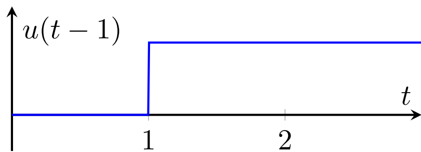


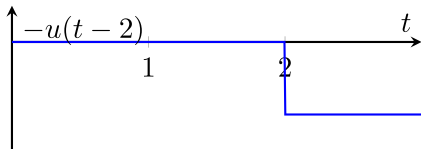
Degrau Unitário – Janelamento

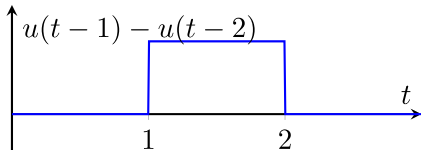




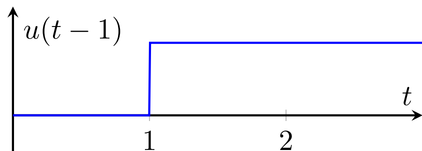
Degrau Unitário – Janelamento

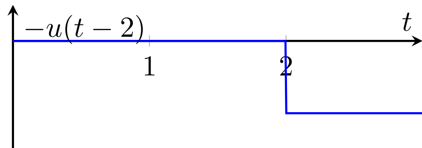


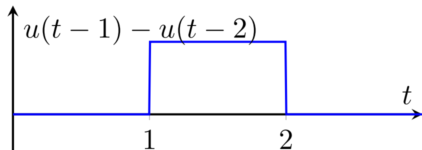


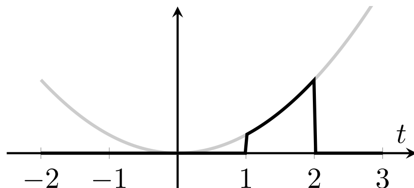


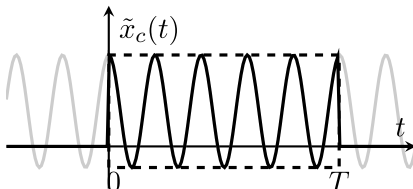
Degrau Unitário – Janelamento



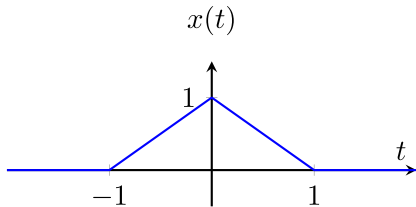






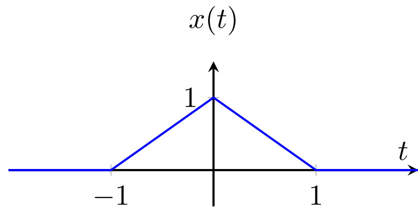


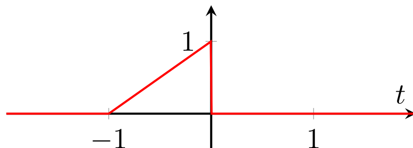
Degrau Unitário – Sinais Definidos por Partes



$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ t+1, & -1 \leq t < 0 \\ -t+1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

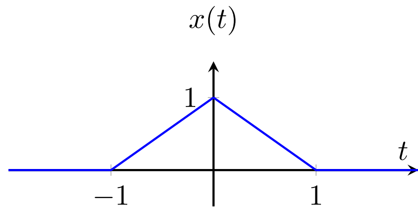
Degrau Unitário – Sinais Definidos por Partes

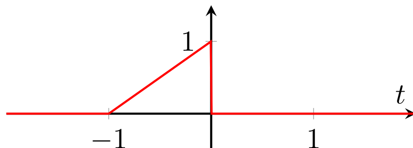


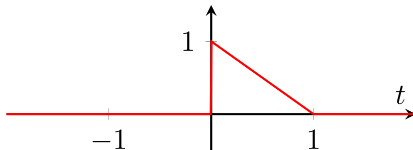


$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ t+1, & -1 \leq t < 0 \\ -t+1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

Degrau Unitário – Sinais Definidos por Partes

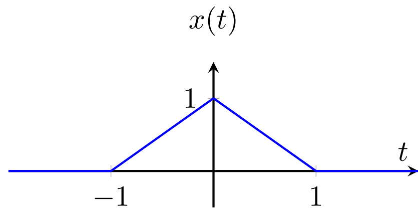






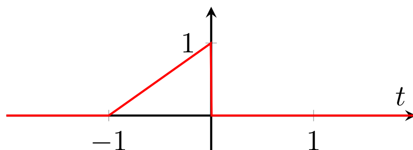
$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ t+1, & -1 \leq t < 0 \\ -t+1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

Degrau Unitário – Sinais Definidos por Partes

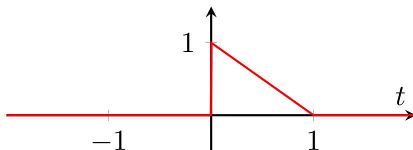


$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ t+1, & -1 \leq t < 0 \\ -t+1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

$(t+1)[u(t+1) - u(t)]$



$(-t+1)[u(t) - u(t-1)]$

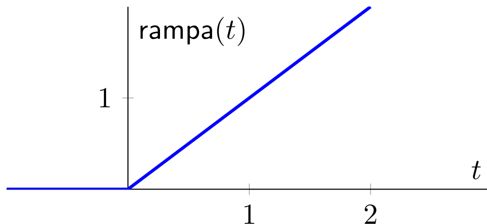


$$\begin{aligned} x(t) = \quad & (t+1)\,[u(t+1) - u(t)] \\ & +(-t+1)\,[u(t) - u(t-1)] \end{aligned}$$

Rampa Unitária

$$\text{rampa}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{rampa} = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau = t\,u(t)$$

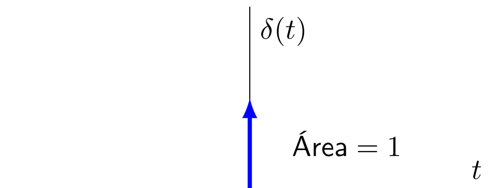


Impulso Unitário (ou Delta de Dirac)

Definição:

$$\delta(t) = 0, \ \forall t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$



Impulso Unitário (ou Delta de Dirac)

Definição:

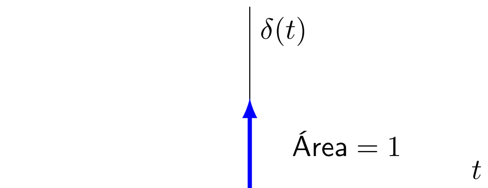
$$\delta(t) = 0, \ \forall t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \mathrm{d}t = 1$$

Relação com o Degrau Unitário:

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$



Impulso Unitário

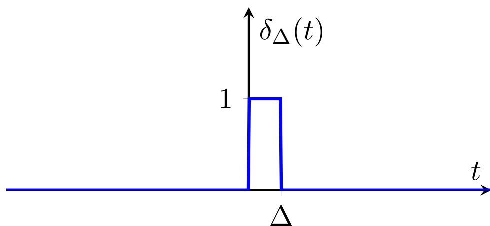
Questão

Se o degrau unitário é descontínuo em $t = 0$, $u(t)$ não é diferenciável. Como interpretar $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$ na prática?

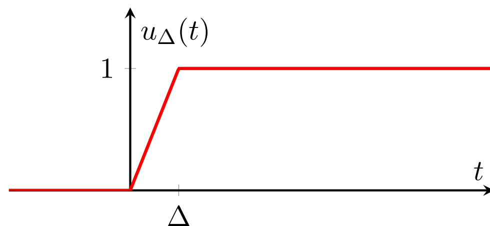
Impulso Unitário

Questão

Se o degrau unitário é descontínuo em $t = 0$, $u(t)$ não é diferenciável. Como interpretar $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$ na prática?

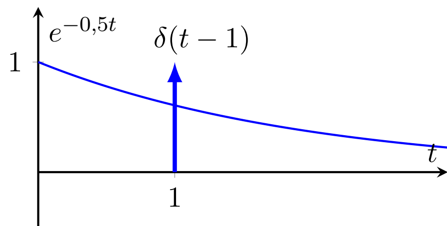


$$\delta_\Delta(t) = \frac{\mathrm{d}u_\Delta(t)}{\mathrm{d}t}$$

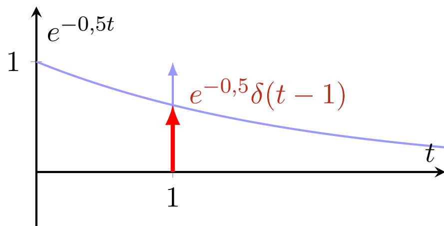


$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

Impulso Unitário – Multiplicação por Função Contínua



Impulso Unitário – Multiplicação por Função Contínua



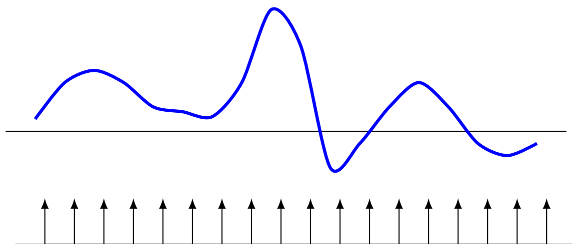
Extração do valor pontual de uma função:

$$\delta(t-t_0)\,g(t) = \delta(t-t_0)\,g(t_0)$$

Trem de Impulsos

Trem de impulsos periódico (período T)

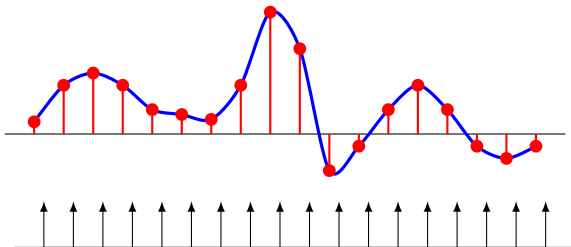
$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



Trem de Impulsos

Trem de impulsos periódico (período T)

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

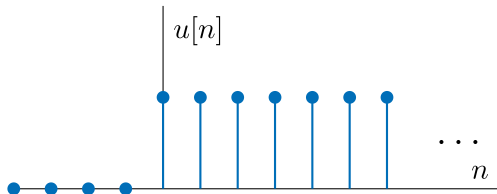


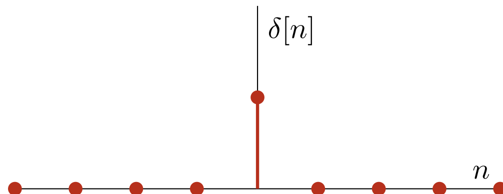
Degrau e Impulso Unitários Discretos

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$





Exponencial Complexa

Definição:

$$x(t) = Ce^{at}, \qquad C, a \in \mathbb{C}, \quad a = r + j\omega, \quad \omega \to \text{rad/s}$$
$$x[n] = C\alpha^{n}, \qquad C, \alpha \in \mathbb{C}, \quad \alpha = |\alpha|e^{j\omega}, \quad \omega \to \text{rad/amostra}$$

- a e α: Exponenciais crescentes, decrescentes, oscilantes, etc.

Exponencial Complexa

Definição:

$$x(t) = Ce^{at}, \qquad C, a \in \mathbb{C}, \quad a = r + j\omega, \quad \omega \rightarrow \text{rad/s}$$

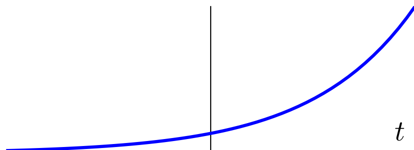
$$x[n] = C\alpha^{n}, \qquad C, \alpha \in \mathbb{C}, \quad \alpha = |\alpha|e^{j\omega}, \quad \omega \rightarrow \text{rad/amostra}$$

- a e α: Exponenciais crescentes, decrescentes, oscilantes, etc.

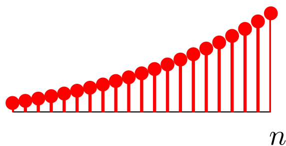
- Senóides e exponenciais reais são casos particulares.
  Identidade de Euller: $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

Tipos de Exponenciais

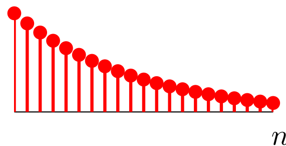
$x(t) = Ce^{at}, \quad a > 0$



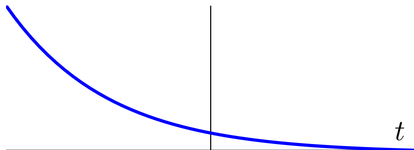
$x[n] = C\alpha^n, \quad \alpha > 0$



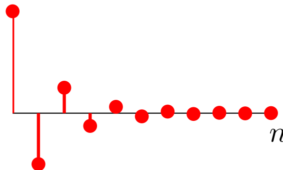
$x[n] = C\alpha^n, \quad 0 < \alpha < 1$



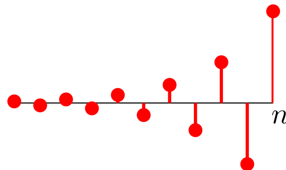
$x(t) = Ce^{at}, \quad a < 0$



$x[n] = C\alpha^n, \quad -1 < \alpha < 0$

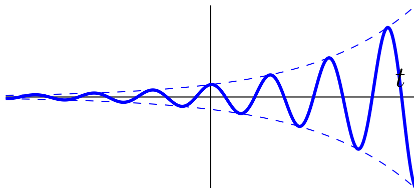


$x[n] = C\alpha^n, \quad \alpha < -1$

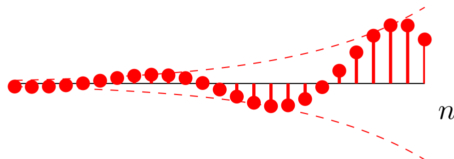


Tipos de Exponenciais

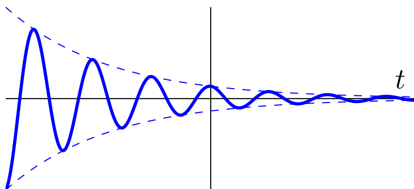
$$x(t) = Ce^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta), \quad r > 0$$



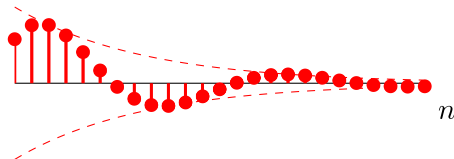
$$x[n] = C\alpha^n \cos(\omega_0 n + \theta), \quad \alpha > 0$$



$$x(t) = Ce^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta), \quad r < 0$$



$$x[n] = C\alpha^n \cos(\omega_0 n + \theta), \quad \alpha < 0$$



Propriedades das Exponenciais Complexas Contínuas

Exponencial Contínua: $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, $\omega_0 \rightarrow$ rad/s

a) Taxa de variação: Quanto maior ω_0, maior a taxa de variação;

b) Periodicidade: Para ser periódico $\rightarrow x(t) = x(t+T)$

Propriedades das Exponenciais Complexas Contínuas

Exponencial Contínua: $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, $\omega_0 \rightarrow$ rad/s

a) Taxa de variação: Quanto maior ω_0, maior a taxa de variação;

b) Periodicidade: Para ser periódico $\rightarrow x(t) = x(t+T)$

- $e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$

Propriedades das Exponenciais Complexas Contínuas

Exponencial Contínua: $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, $\omega_0 \rightarrow$ rad/s

a) Taxa de variação: Quanto maior ω_0, maior a taxa de variação;

b) Periodicidade: Para ser periódico $\rightarrow x(t) = x(t+T)$

- $e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$ $\rightsquigarrow$ logo, $e^{j\omega_0 T} = 1$

Propriedades das Exponenciais Complexas Contínuas

Exponencial Contínua: $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, $\quad \omega_0 \rightarrow$ rad/s

a) Taxa de variação: Quanto maior ω_0, maior a taxa de variação;

b) Periodicidade: Para ser periódico $\rightarrow x(t) = x(t+T)$

- $e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$ $\quad \rightsquigarrow \quad$ logo, $e^{j\omega_0 T} = 1$
- para que isso aconteça, $\omega_0 T$ deve ser múltiplo de 2π

Propriedades das Exponenciais Complexas Contínuas

Exponencial Contínua: $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, $\omega_0 \rightarrow$ rad/s

a) Taxa de variação: Quanto maior ω_0, maior a taxa de variação;

b) Periodicidade: Para ser periódico $\rightarrow x(t) = x(t+T)$

- $e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$ $\rightsquigarrow$ logo, $e^{j\omega_0 T} = 1$
- para que isso aconteça, $\omega_0 T$ deve ser múltiplo de 2π
- menor período possível $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Propriedades das Exponenciais Complexas Contínuas

Exponencial Contínua: $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, $\omega_0 \rightarrow$ rad/s

a) Taxa de variação: Quanto maior ω_0, maior a taxa de variação;

b) Periodicidade: Para ser periódico $\rightarrow x(t) = x(t+T)$

- $e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$ $\rightsquigarrow$ logo, $e^{j\omega_0 T} = 1$
- para que isso aconteça, $\omega_0 T$ deve ser múltiplo de 2π
- menor período possível $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Portanto:

$x(t)$ é sempre periódico, para qualquer valor de ω_0, com período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Propriedades das Exponenciais Complexas Discretas

Exponencial Discreta: $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $\omega_0 \rightarrow$ rad/amostra

a) Taxa de variação: vamos somar 2π à frequência angular ω_0

Propriedades das Exponenciais Complexas Discretas

Exponencial Discreta: $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $\quad \omega_0 \rightarrow$ rad/amostra

a) Taxa de variação: vamos somar 2π à frequência angular ω_0

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j2\pi n}$$

Propriedades das Exponenciais Complexas Discretas

Exponencial Discreta: $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $\omega_0 \to$ rad/amostra

a) Taxa de variação: vamos somar 2π à frequência angular ω_0

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n} \cdot 1$$

Propriedades das Exponenciais Complexas Discretas

Exponencial Discreta: $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $\omega_0 \rightarrow$ rad/amostra

a) Taxa de variação: vamos somar 2π à frequência angular ω_0

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n} \cdot 1 = e^{j\omega_0 n}$$

Propriedades das Exponenciais Complexas Discretas

Exponencial Discreta: $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $\omega_0 \rightarrow$ rad/amostra

a) Taxa de variação: vamos somar 2π à frequência angular ω_0

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n} \cdot 1 = e^{j\omega_0 n}$$

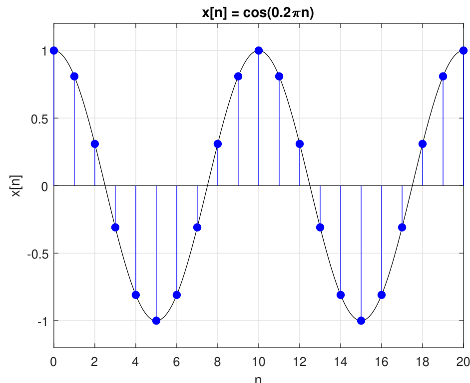
- A taxa de variação não aumenta indefinidamente com ω_0 (aumenta apenas no intervalo de 2π)

Exponenciais Complexas Discretas: Taxa de Variação

```
t = 0:0.01:20;
n = 0:20;

omega = 0.2*pi;

figure(1)
plot(t, cos(omega*t), 'black');
hold on;
stem(n, cos(omega*n), 'blue', 'filled');
axis([0, 20, -1.2, 1.2])
title(['x[n] = cos('num2str(omega/pi) '\pin)'])
xlabel('n')
ylabel('x[n]')
grid on
hold off
```

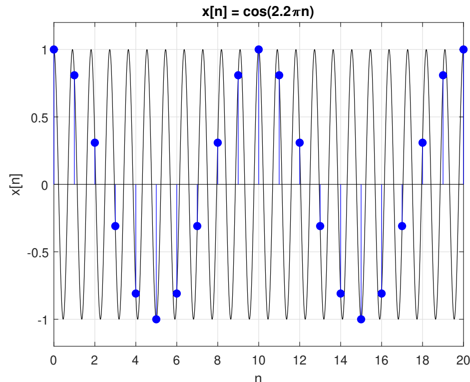


Exponenciais Complexas Discretas: Taxa de Variação

```
t = 0:0.01:20;
n = 0:20;

omega = 2.2*pi;

figure(1)
plot(t, cos(omega*t), 'black');
hold on;
stem(n, cos(omega*n), 'blue', 'filled');
axis([0, 20, -1.2, 1.2])
title(['x[n] = cos('num2str(omega/pi) '\pin)'])
xlabel('n')
ylabel('x[n]')
grid on
hold off
```

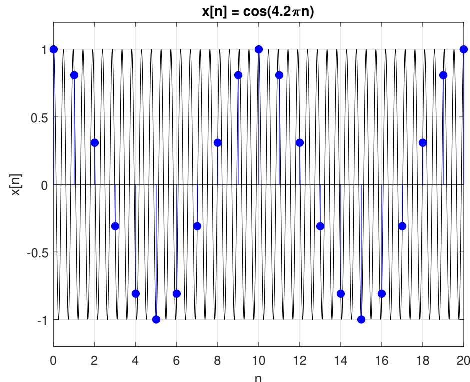


Exponenciais Complexas Discretas: Taxa de Variação

```
t = 0:0.01:20;
n = 0:20;

omega = 4.2*pi;

figure(1)
plot(t, cos(omega*t), 'black');
hold on;
stem(n, cos(omega*n), 'blue', 'filled');
axis([0, 20, -1.2, 1.2])
title(['x[n] = cos('num2str(omega/pi) '\pin)'])
xlabel('n')
ylabel('x[n]')
grid on
hold off
```



Propriedades das Exponenciais Complexas Discretas

Exponencial Discreta: $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $\omega_0 \rightarrow$ rad

b) Periodicidade: Para ser periódico $\rightarrow x[n] = x[n+N]$

Propriedades das Exponenciais Complexas Discretas

Exponencial Discreta: $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $\omega_0 \rightarrow$ rad

b) Periodicidade: Para ser periódico $\rightarrow x[n] = x[n+N]$

- $e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 (n+N)} = e^{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 N}$ $\rightsquigarrow$ logo, $e^{j\omega_0 N} = 1$

Propriedades das Exponenciais Complexas Discretas

Exponencial Discreta: $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $\omega_0 \rightarrow$ rad

b) Periodicidade: Para ser periódico $\rightarrow x[n] = x[n+N]$

- $e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 (n+N)} = e^{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 N}$ $\rightsquigarrow$ logo, $e^{j\omega_0 N} = 1$
- Para que isso aconteça, $\omega_0 \, N = 2\pi \, m$, onde $N, m \in \mathbb{Z}$.

Propriedades das Exponenciais Complexas Discretas

Periodicidade da Exponencial Discreta:

$$\omega_0\, N = 2\pi\, m \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{m}{N} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

com $N, m \in \mathbb{Z}$.

Propriedades das Exponenciais Complexas Discretas

Periodicidade da Exponencial Discreta:

$$\omega_0 \, N = 2\pi \, m \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{m}{N} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

com $N, m \in \mathbb{Z}$.

- Apenas se $\frac{m}{N}$ for racional e irredutível, $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ será periódico
- Neste caso, o período fundamental será N.

Propriedades das Exponenciais Complexas Discretas

Periodicidade da Exponencial Discreta:

$$\omega_0 \, N = 2\pi \, m \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{m}{N} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

com $N, m \in \mathbb{Z}$.

- Apenas se $\dfrac{m}{N}$ for racional e irredutível, $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ será periódico
- Neste caso, o período fundamental será N.

Portanto:

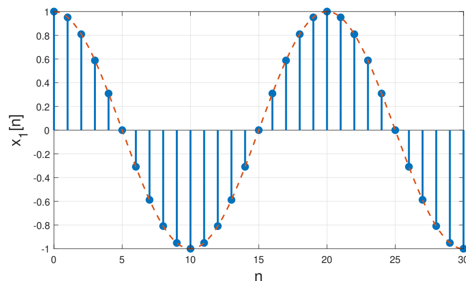
$x[n]$ não é sempre periódico. Para ser periódico, ω_0 deve obedecer aos critérios de que a relação $\frac{m}{N} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ seja válida para $N, m \in \mathbb{Z}$.

Exponenciais Complexas Discretas: Periodicidade

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{10}n\right)$$

$$\frac{m}{N} = \frac{\omega_0}{2\pi} \iff \frac{1}{20} = \frac{\pi/10}{2\pi}$$

- Logo, é periódico com $N = 20$ e $\omega_0 = \frac{\pi}{10}$



Exponenciais Complexas Discretas: Periodicidade

$$x_2[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5\sqrt{2}}n\right)$$

$$\frac{m}{N} = \frac{\omega_0}{2\pi} \iff \frac{m}{N} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

- Não é possível encontrar $N, m \in \mathbb{Z}$ para resolver a relação acima
- Logo, não é periódico

